EX 22 :

1) $z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1.e^{i0}$

Les solutions sont :

$z_k = \sqrt[4]{1}e^{i(\frac{2k\pi}{4})}$ *avec* $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$z_0 = 1 \;\; ; z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \;\; ; z_2 = e^{i\pi} = -1 \;\; ; z_3 = e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$

2) $(E): \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$

On pose $t = \frac{z-i}{z+i}$

L'équation devient : $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$

(-1) est une solution d'où :

$t^3 + t^2 + t + 1 = (t+1)(t^2 + bt + c) = t^3 + (b+1)t^2 + (c+b)t + c$

En identifions on aura : $\begin{cases} b+1=1 \\ c+b=1 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases}$

D'où

$t^3 + t^2 + t + 1 = (t+1)(t^2+1)$

$t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2+1) = 0 \Leftrightarrow t+1 = 0 \; ou \; t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \; ou \; t^2 = -1 \Leftrightarrow t = -1 \; ou \; t = -i \; ou \; t = i$

• $t = \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow tz + ti = z - i \Leftrightarrow (1-t)z = i(1+t) \Leftrightarrow z = i\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$.

pour $t = -1 \rightarrow z = 0$

pour $t = i \rightarrow z = i\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = -1$

pour $t = -i \rightarrow z = i\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = 1$

Les solutions de (E) sont : 0 ; -1 et 1. $S_C = \{-1; 0; 1\}$

EX 23 :

a)

$(E): 1 + z + z^2 + ... + z^6 = 0$

On a : pour $z \neq 1$ $\quad 1 + z + z^2 + ... + z^6 = \frac{1-z^7}{1-z}$

1 n'est pas une solution de (E) d'où : $(E) \Leftrightarrow 1 - z^7 = 0 \; et \; z \neq 1$

$\Leftrightarrow z^7 = 1 \; et \; z \neq 1$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn